наявних випадкових процесів пошкоджуваності // Промислова гідравліка і пневматика. – Вінниця: ВНАУ, 2011. – № 1 (31). – С. – 71 – 84. **2.** Расчет, проектирование и эксплуатация объемного гидропривода: учеб. пособие / *З.Л. Финкельштейн, О.М. Яхно, В.Г. Чебан* и др.. К.: НТУУ «КПИ», 2006. – 216 с. **3.** *Аврунін Г.А., Кириченко І.Г., Мороз І.І.* Основи об'ємного гідропривода і гідропневмоавтоматика: навч. посібн. Під ред. Г.А. Авруніна. Харків: ХНАДУ, 2009. – 424 с. **4.** *Андренко П.М.* Побудова математичних моделей гідроапаратів із гідравлічним вібраційним контуром // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2004. – №2 (8). – С. 15 – 20. **5.** *Лурьє З., Федоренко И.* Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2010. – Vol. 12 C. 10 – 25. **6.** *Попов Д.Н.* Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: [учебник для вузов] – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с. **7.** *Данилов Ю.А, Кирилловский Ю.Л., Колпаков Ю.Г.* Аппаратура объемных гидроприводов: Рабочие процессы и характеристики. – М.: Машиностроение, 1990. – 272 с. **8.** *Лур'є З.Я., Андренко П.М.* Розрахунок сили тертя на запорно-регулюючому елементі гідроапарата з вібраційною лінеаризацією // Вісник НТУ "ХПІ". – 2008. – № 4. – С. 129 –137.

Надійшла до редколегії 21.03.2012

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН, д-р физ.-мат. наук, доц., ГИУА, Ереван

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Розглядається задача Діріхле для правильно еліптичного рівняння з постійними коефіцієнтами четвертого порядку в одиничному колі. Рішення шукається в класі функцій, що задовольняють умові Гельдера аж до кордону разом з похідними першого порядку. Отримано умови на коефіцієнти, необхідні і достатні для однозначної розв'язності зазначеного завдання, а при порушенні цих умов доведено, що дефектні числа завдання рівні одиниці. Рішення даної задачі і умови розв'язності визначаються в явному вигляді.

Рассматривается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами четвертого порядка в единичном круге. Решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера вплоть до границы вместе с производными первого порядка. Получены условия на коэффициенты, необходимые и достаточные для однозначной разрешимости указанной задачи, а при нарушении этих условий доказано, что дефектные числа задачи равны единице. Решение рассматриваемой задачи и условия разрешимости определяются в явном виде.

We consider the Dirichlet problem for the fourth order properly elliptic equation with constant coefficients in the unit disc. We seek the solution in the class of functions which satisfy Holder condition up to the boundary with first degree derivatives. The necessary and sufficient conditions of the unique solvability of the problem are obtained. If these conditions failed, it was proved that the defect numbers of the problem are equal to one. The solution of the problem and the solvability conditions are determined in explicit form.

Введение и формулировка доказываемых теорем. Пусть $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ – единичный круг комплексной плоскости. В области D рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y)=0, \quad (x,y)\in D, \tag{1}$$

где A_k – комплексные постоянные. Предполагаем, что λ_j ($j=1,2,3,4$) – это корни характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k}=0, \tag{2}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\lambda_1=i, \quad \lambda_2\neq i, \quad \lambda_3=\lambda_4, \ \Im\lambda_2>0, \ \Im\lambda_3<0. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) ищется в классе $C^4(D)\bigcap C^{(1,\alpha)}(\overline{D})$, и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u|_\Gamma=f(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_\Gamma=g(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma. \tag{4}$$

Здесь $f\in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g\in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции, $\partial/\partial N=-\partial/\partial r$ – дифференцирование по направлению внутренней нормали к границе Γ. Далее $z=x+iy=re^{i\varphi}$. Задача (1), (4) фредгольмова (смотри [1]). Однозначная разрешимость однородной задачи (1), (4) (при $f\equiv g\equiv 0$) была исследована в [2]. В [3] была исследована однородная и неоднородная задача (1), (4) и получена формула для вычисления дефектных чисел задачи. В предлагаемой работе, используя представление общего решения уравнения (1), полученное в [4], выводится другая формула для определения дефектных чисел, которая позволяет доказать, что в исследуемом случае эти дефектные числа могут принимать значения равные только нулю или единице. Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

Обозначим

$$\mu=\frac{i-\lambda_2}{i+\lambda_2}, \ \nu=\frac{i+\lambda_3}{i-\lambda_3}, \quad \delta=\mu\nu. \tag{5}$$

Отметим, что из (3) следует, что $0<|\mu|<1$ и $|\nu|<1$, следовательно, и $|\delta|<1$.

Ниже доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *При $\nu=0$ задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима. При $\nu\neq 0$ задача Дирихле (1), (4) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$P_{k-2}(\delta)=\sum_{j=0}^{k-2}(j+1)\delta^j\neq 0, \quad k=3,4,\ldots. \tag{6}$$

Если условие (6) нарушается при некотором n, то однородная задача (1), (4) имеет ненулевое решение, которое является полиномом порядка $n+1$. Следовательно, если условие (6) нарушается при $k_1, k_2, \ldots, k_l$, то дефектные числа задачи равны l.

Отметим, что так как $|\delta|<1$, то условия (6) могут нарушаться только для конечного числа k. Доказываем, что справедливо более точное утверждение.

Теорема 2. *Пусть корни уравнения (2) удовлетворяют условию (3). Тогда условие (6) может нарушаться не более чем для одного значения k. Таким образом, задача Дирихле или однозначно разрешима, или же однородная задача Дирихле (1), (4) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы граничные функции f и g удовлетворяли одному условию ортогональности, то есть дефектные числа задачи (1), (4) равны единице.*

Вспомогательные предложения. Сначала представим уравнение (1) и граничные условия (4) в комплексной форме. Используя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

приводим уравнение (1) к следующей форме

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\nu\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^2 u=0. \tag{7}$$

Здесь числа μ и ν определяются по формулам (5). Далее, учитывая равенства

$$z\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right), \quad \overline{z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

которые выполняются при всех $z=re^{i\varphi}\neq 0$, граничные условия (4) приводим к эквивалентной форме:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\Gamma}=F(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right|_{\Gamma}=G(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma; \quad u(1,0)=f(1,0). \tag{8}$$

Граничные функции F, G из класса $C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по заданным функциям f и g:

$$F(x,y)=-\frac{x-iy}{2}\left(g+i\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right), \; G(x,y)=-\frac{x+iy}{2}\left(g-i\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right), \; (x,y)\in\Gamma. \tag{9}$$

В дальнейшем будем исследовать задачу (7), (8). Сначала решим уравнение (7). При $\nu\neq 0$ будем использовать представление общего решения уравнения (7), полученное в [4] (***лемма 1***):

$$u(x,y)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z+\mu\bar{z})+\Psi_1(\bar{z}+\nu z)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2(\bar{z}+\nu z),\ z=x+iy,\ (x,y)\in D. \quad (10)$$

Здесь функция Φ_2 аналитична в области $D(\mu)=\{z+\mu\bar{z}:z\in D\}$, функция Φ_1 аналитична в круге D, а функции Ψ_j ($j=1,2$) аналитичны в области $D(\nu)=\{\bar{z}+\nu z:z\in D\}$. При $\nu=0$ общее решение уравнения (7) запишем в виде ([1]):

$$u(x,y)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z+\mu\bar{z})+\Psi_1(\bar{z})+(1-z\bar{z})\Psi_2(\bar{z}),\ (x,y)\in D, \quad (11)$$

где Φ_2 аналитическая в $D(\mu)$, а Φ_1, Ψ_j аналитические в D функции. Таким образом, нам необходимо определить неизвестные аналитические функции Φ_j и Ψ_j ($j=1,2$) по граничному условию (8). Для этого нам понадобится представление функций $\Phi_2(z+\mu\bar{z})$ и $\Psi_j(\bar{z}+\nu z)$ в окрестности Γ аналитическими в D функциями. В [5] доказано, что если $|\mu|<1$ и $|\nu|<1$, а функции Φ и Ψ аналитичны в областях $D(\mu)$ и $D(\nu)$ соответственно, то при $|z|=1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega(z)+\omega(\mu\bar{z}),\qquad \Psi(\bar{z}+\nu z)=\rho(\bar{z})+\rho(\nu z). \quad (12)$$

Здесь ω и ρ – аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω и ρ, то Φ и Ψ восстанавливаются по формулам:

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}+\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right)+\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}-\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right),$$

$$\Psi(\bar{z}+\nu z)=\rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z}+\nu z+\sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2-4\nu})\right)+\rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z}+\nu z-\sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2-4\nu})\right),$$

где $|z|<1$. В первой из этих формул выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2-4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu},2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2-4\mu}\to 1$ при $\zeta\to\infty$. Во второй формуле ветвь выбирается аналогично.

Доказательство теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай $\nu\neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) определяется по формуле (10). Используя легко проверяемые операторные равенства

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+iI\right)\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial\varphi}=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \quad (13)$$

(I – единичный оператор), после подстановки функции (10) в граничные уравнения (8), получаем следующие уравнения:

$$\Phi_1'(t)+\Phi_2'(t+\mu\overline{t})+\nu\Psi_1'(\overline{t}+\nu t)+\nu\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+iI\right)\Psi_2'(\overline{t}+\nu t)=F(t),$$

$$\mu\Phi_2'(t+\mu\overline{t})+\Psi_1'(\overline{t}+\nu t)+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-iI\right)\Psi_2'(\overline{t}+\nu t)=G(t),\, t=x+iy,\ (x,y)\in\Gamma. \quad (14)$$

Представим функции Φ_2' и Ψ_j' на границе Γ по формулам (12):

$$\Phi_2'(t+\mu\overline{t})=\vartheta(t)+\vartheta(\mu\overline{t}),\ \Psi_j'(\overline{t}+\nu t)=\psi_j(\overline{t})+\psi_j(\nu t),\, t\in\Gamma,\ j=1,2. \quad (15)$$

Здесь ϑ и ψ_j аналитические в круге D функции. Учитывая, что равенства (15) выполняются при всех $t\in\Gamma$, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\pm iI\right)\Psi_2'(\overline{t}+\nu t)=-i\overline{t}\psi_2'(\overline{t})+i\nu t\psi_2'(\nu t)\pm i(\psi_2(\overline{t})+\psi_j(\nu t)),\ t\in\Gamma. \quad (16)$$

Разложим функции Φ_1, ϑ, ψ_j ($j=1,2$) в ряд Тейлора:

$$\Phi_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}t^k,\ \vartheta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}t^k,\ \psi_j(t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{jk}t^k, \quad (17)$$

а функции F и G – в ряд Фурье:

$$F(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k t^k,\ G(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}G_k t^k, \quad (18)$$

и подставим (18), (17), (16), (15) в граничные равенства (14). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\mu^k t^{-k}+\nu\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}t^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\nu^{k+1}t^k+$$

$$+i\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-k+1)B_{2k}t^{-k}+i\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)B_{2k}\nu^{k+1}t^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k t^k, \quad (19)$$

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\mu^{k+1}t^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}t^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}B_{1k}\nu^k t^k+i\sum_{k=0}^{\infty}(-k-1)B_{2k}t^{-k}+$$

$$+i\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)B_{2k}\nu^k t^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}G_k t^k,\quad |t|=1. \quad (20)$$

Эти соотношения выполняются при всех $t\in\Gamma$, поэтому коэффициенты при соответствующих степенях t^k в правых и левых частях (19) и (20)должны совпадать. При $k\geq 1$ получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_{jk} и B_{jk}:

$$\begin{cases} A_{1k}+A_{2k}+\nu^{k+1}B_{1k}+i(k+1)\nu^{k+1}B_{2k}=F_k \\ \mu A_{2k}+\nu^k B_{1k}+i(k-1)\nu^k B_{2k}=G_k \\ \mu^k A_{2k}+\nu B_{1k}+i(-k+1)\nu B_{2k}=F_{-k} \\ \mu^{k+1}A_{2k}+B_{1k}+i(-k-1)B_{2k}=G_{-k} \end{cases}. \quad (21)$$

При $k=0$ постоянные A_{j0} и B_{j0} определяются из следующих уравнений:

$$\begin{cases} A_{10}+2A_{20}+2\nu B_{10}+2iB_{20}=F_0 \\ 2\mu A_{20}+2B_{10}-2iB_{20}=G_0 \end{cases}. \tag{22}$$

Система (22) всегда разрешима, но решение не единственно. Также и система (21) при $k=1$ не является однозначно разрешимой, так как левые части второго и третьего уравнений совпадают. Учитывая, что $F_{-1}=G_1$ (это следует из (18) и (9)), получим, что система (21) при $k=1$ также имеет решение.

Заметим, что не единственность решения этих систем не приводит к нетривиальным решениям однородной задачи (1), (4), так как решением этой задачи может быть только многочлен ([6]), а в силу однородных условий (4), он имеет вид (смотри [7], стр.74, теорема 5.1) $P(x,y)=(1-z\bar{z})^2Q(x,y)$, то есть является многочленом не менее чем четвертого порядка. Таким образом, коэффициенты A_{jk} и B_{jk} при $k=0,1$ не приводят к нетривиальным решениям однородной задачи (1), (4).

Итак, для определения дефектных чисел следует изучить систему (21) при $k\geq 2$. Вычисляя определитель матрицы системы (21), получим

$$\Delta_k=2i\mu\nu(\delta-1)^2P_{k-2}(\delta), \tag{23}$$

где δ и P_{k-2} определяются в (5) и (6). Таким образом, Δ_k отличается от P_{k-2} ненулевым сомножителем. Если выполняются условия (6), то коэффициенты A_{jk} и B_{jk} при $k\geq 2$ определяются однозначно, поэтому функции $\Phi_1', \vartheta, \psi_j$, а, следовательно, и функции Φ_2', Ψ_j' определяются единственным образом (с точностью до многочленов первого порядка). Из формулы (23) следует, что при $k\to\infty$ имеем $\Delta_k\to -2i\nu\mu\neq 0$. Поэтому получаем, что на бесконечности порядок роста коэффициентов функции Ψ_2' совпадает с порядком роста коэффициентов F_k и G_k, а порядок роста коэффициентов функции Φ_j' и Ψ_1' совпадает с порядком роста kF_k и kG_k.

Учитывая, что порядок роста коэффициентов ряда Фурье функции определяет *класс Гельдера*, которому эта функция принадлежит (смотри [8], гл.2, параграф 3), получаем, что решение u, полученное по коэффициентам A_{jk} и B_{jk} по формуле (10) принадлежит классу $C^{(1,\alpha)}(D\cup\Gamma)$, то есть является искомым решением задачи (1), (4).

Предположим, что условие (6) нарушено при некотором k_0. Тогда, при этом k_0 однородная система (21) имеет одно линейно независимое решение (ранг основной матрицы системы не меньше трех) A_{jk_0} и B_{jk_0}, по которому определяется одно линейно независимое решение однородной задачи (1), (4), u_{k_0}, являющееся многочленом степени k_0+1.

Соответственно, для разрешимости неоднородной системы (21) необходимо одно линейно независимое условие на коэффициенты $F_{\pm k_0}$ и $G_{\pm k_0}$, которое представляет собой условие ортогональности, накладываемое на граничные функции f и g.

Итак, при $\nu \neq 0$ теорема 1 доказана. В случае $\nu = 0$ доказательство проводится аналогично, при этом нет необходимости разложения в ряд неизвестных функций Φ_j и Ψ_j, они определяются непосредственно из граничных равенств (8). Теорема 1 доказана.

Пример. Пусть условие (6) нарушено при $k=3$. Тогда $P_1(\delta) \equiv 1+2\delta = 0$, то есть $\delta = -0.5$. Это равенство выполнено, например, при $\mu = -2/3$, $\nu = 3/4$. Легко проверить, что *однородная задача Дирихле* для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 u = 0$$

имеет нетривиальное решение $u_0(x,y) = (1-z\bar{z})^2$. Для разрешимости неоднородной задачи (1), (4) необходимо и достаточно условие $32/27G_3 - 2F_{-3} + G_{-3} = 0$. Учитывая, что F_k и G_k – это коэффициенты Фурье функций (9), получаем одно условие на граничные функции f и g, необходимое и достаточное для разрешимости задачи (1), (4):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi})\left(\frac{64}{27}e^{-2i\varphi}+4e^{2i\varphi}+4e^{4i\varphi}\right)d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi})\left(\frac{32}{27}e^{-2i\varphi}-2e^{2i\varphi}+e^{4i\varphi}\right)d\varphi = 0.$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства рассмотрим многочлен

$$P_{k-2}(z) = \sum_{j=0}^{k-2}(j+1)z^j, \tag{24}$$

определенный по формуле (6). По *теореме Енестрема – Какейа* ([9]) корни многочлена $Q_n(z) = \sum_{j=0}^{n} p_j z^j$ с положительными коэффициентами p_j находятся в кольце

$$\min_j\left(\frac{p_j}{p_{j+1}}\right) \le |z| \le \max_j\left(\frac{p_j}{p_{j+1}}\right). \tag{25}$$

Применяя эту теорему к многочлену (24), получим, что корни многочлена P_{k-2} находятся в кольце

$$\frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{k-2}{k-1}. \qquad (26)$$

Предположим теперь, что при некотором δ имеем $P_{k-2}(\delta) = P_{k+m-2}(\delta) = 0$. Тогда число δ является корнем многочлена P_{k-2} и корнем многочлена

$$Q(z) \equiv P_{k+m-2}(z) - P_{k-2}(z) = z^{k-1} \sum_{j=0}^{m-1} (j+k) z^j \equiv z^{k-1} R(z).$$

Поскольку $\delta \neq 0$, то δ является корнем многочлена R. С другой стороны, применяя неравенство (25), получим, что корни многочлена R находятся в кольце

$$\frac{k}{k+1} \leq |z| \leq \frac{k+m-2}{k+m-1}. \qquad (27)$$

Области (26) и (27) не пересекаются, поэтому многочлены P_{k-2} и R и, следовательно, P_{k-2} и P_{k+m-2} не могут иметь общих корней. Теорема 2 доказана.

Замечание. Отметим, что из (26) следует, что при $|\delta| < 0.5$ условие (6) выполняется, то есть задача (1), (4) однозначно разрешима.

Список литературы. **1.** *Tovmasyan N.E.*, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific Publ., Singapore, 1998, – 236pp. **2.** *Буряченко Е.А.*, О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. Сб. научных трудов, – Вып. 10. – Донецк. 2000. – С. 44-49. **3.** *Бабаян А.О.*, Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для правильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Известия НАН Армении, Математика. – Т.34. – №.5. – 1999. – С.1-15. **4.** *Бабаян А.О.*, Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге // Известия НАН Армении, Математика. – Т.38. – №.6. – 2003. – С. 39-48. **5.** *Товмасян Н.Е.*, Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия НАН Армении, Математика. – Т.3. – №.6. – 1968. – С. 497-521. **6.** *Morrey C.B.*, On the analyticity of the solutions of analytic non linear elliptic systems of partial differential equations // Am. J. Math., 80. – №.1. – 1958, – pp.219-237. **7.** *Axler S.*, *Bourdon P.*, *Ramey W.*, Harmonic function theory. – New York, Springer-Verlag, 2001, – 270pp. **8.** *Бари Н.К.*, Тригонометрические ряды. – М.: Физматлит, 1961. – 936с. **9.** *Anderson N.*, *Saff E.B.*, *Varga R.S.*, On the Enestrom - Kakeya theorem and its sharpness // Linear Algebra and its Appl. 28, – 1979. – pp. 5-16.

Поступила в редколлегию 27.03.2012